华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称 矩阵论 课程类别 ☑公共课 ☐专业课 考核形式 ☐开卷 ☑闭卷

学生类别 研究生 考试日期 2023.12.01 学生院系________ 班级________

学号__________ 姓名__________ 任课教师______________

题号	一	二	三	四	五	六			总分
分数									

分 数	
评卷人	

一、 填空题（15 分）（每小题 3 分，共 5 小题）

1. 记 W 为实数域上的所有 3 阶对称矩阵构成的线性空间，则 W 的维数为________.

2. 设自然基 $E_{ij} \in R^{n\times n}$，该矩阵在 i 行 j 列相交位置为 1 其余位置全为 0，则$4E_{ij}$的 M-P 广义逆为________________.

3. 矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 15 & -4 \\ 3 & 7 & 12 \\ -20 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，则$\|A\|_\infty=$______________.

4. 矩 阵 $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 A 的最大奇异值为

______________.

5. $\{v_1,\cdots,v_n\}$是R^n的一组标准正交基，则

$$v_1v_1^T+\cdots+v_nv_n^T=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

分 数	
评卷人	

二、（15 分）设 T 是数域 F 上的 n 维线性空间 $V_n(F)$ 上的线性变换.设有非零向量 $\alpha\in V_n(F)$ 使得 $T^{n-1}(\alpha)\neq 0$ 且 $T^n(\alpha)=0$.

(1)证明：$\{\alpha,T(\alpha),T^2(\alpha),\cdots,T^{n-1}(\alpha)\}$ 构成 $V_n(F)$ 的一组基；

(2)求线性变换在基 $\{\alpha,T(\alpha),T^2(\alpha),\cdots,T^{n-1}(\alpha)\}$ 下的矩阵 A.

分 数	
评卷人	

三、(15 分)设T为$P_3[x]$上的线性变换，$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$为$T$在基$\{1,\ \ x,\ \ x^2\}$下的矩阵。

(1) 求一组基$\{f_1,\ \ f_2,\ \ f_3\}$，使得T在这组基下的矩阵为Jordan标准形J_A，并求J_A.

(2) 给出T的一个二维不变子空间W，且W不构成特征子空间。

分 数	
评卷人	

四、(10分)假设3阶方阵 A 满足

$$Ax=2x-3(x,u_1)u_1-2(x,u_2)u_2,$$

其中 $u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的奇异值分解。

分 数	
评卷人	

五、 计算题 (1) (15 分) 给定方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&2&1&1\\2&4&1&2\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

问方程组是否有解？若有解，求最小范数解；若无解，求最小二乘解。

(2) (15 分) 求解以下微分方程组

$$X'(t)=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-3&-1&1\\9&3&-4\end{pmatrix}X(t),\quad X(0)=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}.$$

分 数	
评卷人	

六、(1) (8 分)设 A，B 为 n 阶方阵，证明：

$$\|A\otimes B - B\otimes A\|_2 \le 2\|A\|_2\|B\|_2,$$

这里$\|\cdot\|_2$表示矩阵的 2 范数(由向量的 2 范数诱导)。

(2) (7 分)矩阵$A=(A_1,A_2,\ldots,A_n)\in R^{m\times n}$, $\alpha=(\underbrace{1,\cdots,1}_{n})\in R^{1\times n}$.则当向量$x\in R^{m\times 1}$取何值，使得$\|A-\alpha\otimes x\|_F$最小？这里$\|\cdot\|_F$表示矩阵的 Frobenius 范数。